محاضرة رياضة ١٢

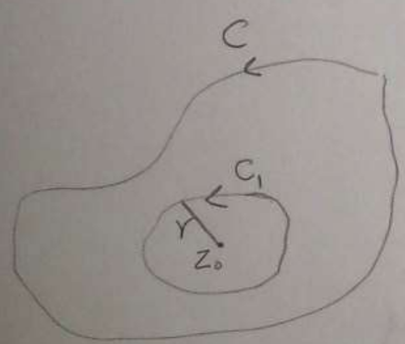
$\boxed{Ex}$ show that if $f(z)$ is analytic and bounded then $f(z)$ must be Constant. use Cauchy Integral Form

sol

C.I

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} \left.\frac{d^n f(z)}{dz^n}\right|_{z=z_0}$$

$|f(z)| \leq M$ ← الدالة تكون محدوده إذا كان



ـــ نفرض دائرة مركزها z_0 ونصف قطرها (r) داخل C

$$\oint = \oint_{C_1}$$

Note

$$\left|\int f\right| \leq \int |f|$$

$$\left| \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \leqslant \oint \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}} dz$$

$$|z-z_0| = r$$

$$\left| \oint_{C_1} \right| \leqslant \frac{M}{r^{n+1}} \oint_C |dz|$$

وحدة طول

جزء من الدائرة وتجميعها يعطي محيط الدائرة بالكامل.

Note

$$dz = dx + i\,dy$$

$$|dz| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$\left| \oint_{C_1} \right| \leqslant \frac{M}{r^{n+1}} (2\pi r)$$

$$\leqslant \frac{M}{r^n} (2\pi)$$

$$\therefore \frac{2\pi i}{n!} \left. \frac{d^n f(z)}{dz^n} \right|_{z=z_0} \leqslant \frac{2\pi M}{r^n} \quad ; |i| = 1$$

$n = 1$

$$|f'(z_0)| \leqslant \frac{M}{r}$$

as $r \longrightarrow 0$

$|f'(z_0)| \leq 0$ * لايوجد مقياس سالب

$f'(z_0) = 0$

$f(z_0) = c$ for all z_0.

$f(z) = \text{constant}$

<u>Note</u> if $r = \infty$ معناها إنتا هنا أخذ Z-plane بالكامل.

$\therefore |f'(z_0)| = 0$

Taylor expansion

← في هذا الجزء ندرس مفكوك (Taylor)

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots\cdots$$

$0 < |z-z_0| < R$ منطقة التقارب

← ممكن وضع قيم مختلفة لـ R حتى ∞.

← نحاول فك الدوال في هذا الجزء بدلالة مفكوك لبعض الدوال المعلومة بأن نقرب رأس المسألة إلى شكل المفكوك

***Some Important expansion:-**

Notes

$$e^{\text{أي حاجة}} = \sum \frac{(\text{أي حاجة})^n}{n!}$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$\boxed{1}$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

$0 < |z| < \infty$ فترة التقارب هي

$$\longrightarrow e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} \cdots$$

$\boxed{2}$

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \cdots$$

فترة التقارب هي $0 < |z| < \infty$

$\boxed{3}$

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \cdots$$

فترة التقارب هي $0 < |z| < \infty$

Note

$\sinh(iz) = i \sin z \quad ; \quad i^2 = -1 \quad , (i)^4 = 1$

$\cosh(iz) = \cos z \quad ;$

$\boxed{4}$

فترة التقارب

$0 < |z| < \infty$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \cdots$$

$\boxed{5}$

فترة التقارب هي

$0 < |z| < \infty$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \cdots$$

$\boxed{6}$

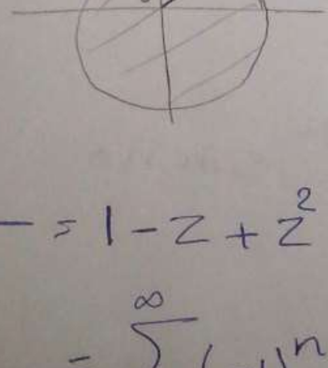
$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

← الحدود من (1 حتى z^2) هي من تعطي قيمة المفكوك

لذلك يجب أن تكون قيم z محصورة ما بين 0 ، 1 .

هذا هو الشرط

$$\boxed{0 < |z| < 1}$$



دائرة نصف قطرها (1)

ومركزها = 0

$\boxed{7}$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \qquad 0 < |z| < 1$$

أسلوب حل المسائل للصوره من ١ لـ ٧

ـــ نحاول أن نجعل رأس المسألة تصل إلى صورة من الصور
السابقة ومن خلالها يمكن جمع صورتين أو طرحهم أو
تفاضل أي صور أو تكامل حتى نصل للصورة المطلوبة.

Ex: Expand the following function at indicated points and region.

[1] $f(z) = e^{2z}$ at $z_0 = 1$

[2] $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ at $z_0 = 0$ and find $\tan^{-1} z$

[3] $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 5z + 6}$ on $0 \leq |z-1| < 1$

[4] Find Taylor series for $f(z) = \dfrac{z}{1-z}$ on $|z| < 1$ and use it to find

$$\sum r^n \cos n\theta \; ; \; \sum r^n . \sin n\theta$$

$\boxed{1}$

ـــه أول مسألة $(Z_0 = 1)$ ـــه عايزين الأقواس داخلها تكون

$$(z - z_0) \xrightarrow{\text{instead of}} z - 1$$

$$e^{u} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots$$

$$e^{2z} = e^{2(z+1-1)} = e^{2} \cdot e^{2(z-1)}$$

$$e^{2z} = e^{2}\left[1 + 2(z-1) + \frac{(2(z-1))^2}{2!} + \frac{(2(z-1))^3}{3!} \cdots\right]$$

$$= e^{2}\left[1 + 2(z-1) + 2(z-1)^2 + \frac{8}{3!}(z-1)^3 \cdots\right]$$

$\boxed{2}$

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 \cdots$$

$$u \to z^2$$

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 \cdots$$

~~tan~~

$$\because \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} = \int \frac{dx}{x^2 + a^2}$$

$\cancel{\frac{1}{a}}$ tan

$$\therefore \tan^{-1} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} \cdots$$

$\boxed{3}$ $$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$$

← من شكل شرط منطقة الفك $(0 < |z-1| < 1)$ يمكن معرفة $(z_0 = 1)$ أي أن الأقواس في الفك يكون داخلها

$\boxed{z-1}$

← إذا تواجد قوس بداخله $(z-1)$ عند التحليل يكون جاهز نتركه كما هو و نجهز القوس الآخر.

← لو كل الأقواس لا تحتوى على $(z-1)$ نستخدم الكسور الجزئية لتبسيط المسألة.

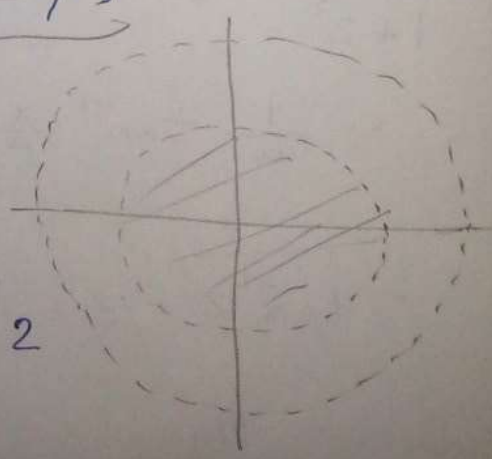
$$f(z) = \frac{a}{z-2} + \frac{b}{z-3} \qquad \therefore a = -1 \,,\ b = 1$$

$$\therefore f(z) = \frac{-1}{z-2} + \frac{1}{z-3} = \frac{-1}{(z-1)-1} + \frac{1}{(z-1)-2}$$

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{1-(z-1)}} - \frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{1}{1-\left(\frac{z-1}{2}\right)}}\right]$$

$$|z-1| < 1 \qquad\qquad \left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$$

$$\therefore |z-1| < 1 \quad ; \quad |z-1| < 2$$



The region is: $0 < |Z-1| < 1$

$$f(z) = \left[1 + (z-1) + (z-1)^2 + \cdots\right] - \frac{1}{2}\left[1 + \frac{(z-1)}{2} + \frac{(z-1)^2}{4} + \cdots\right]$$

$\boxed{4}$ $f(z) = \dfrac{z}{1-z}$; $|z| < 1$

← المطلوب داخل الأقواس $(Z - Z_0)$ $\xleftarrow{\text{بدلاً منها}}$ $Z = (Z - 0)$

← عايزين المفكوك بدلالة قوى Z إذا احتوى جزء على $Z^{(\text{رقم})}$ يكون جاهز ونقوم بتجهيز الآخر.

$$f(z) = z\left[\frac{1}{1-z}\right]$$

$$= z\left[1 + z + z^2 + z^3 \cdots\right] \quad ; |z| < 1$$

$$= z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots$$

$$\frac{z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

$\boxed{9}$ f

$$\because Z = re^{i\theta} \Rightarrow Z^n = r^n e^{in\theta}$$

$$Z^n = r^n\left[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right]$$

$$\frac{re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos(n\theta) + i\, r^n\sin(n\theta)$$

$$\underline{\underline{L.H.S}} = \frac{re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} = \frac{r\cos\theta + r i\sin\theta}{(1-r\cos\theta) - i r\sin\theta}$$

$$\frac{(1-r\cos(\theta)) + i r\sin\theta}{(1-r\cos(\theta)) + i r\sin\theta} \times$$ بالضرب

$$L.H.S = \frac{r\cos\theta(1-r\cos\theta) - r^2\sin\theta}{(1-r\cos(\theta))^2 + r^2\sin^2\theta} \cancel{(1-r\cos(\theta))^2 + r^2\sin^2\theta}$$

$$+\, i\,\frac{r\sin\theta(1-r\cos\theta) + r^2\cos\theta\sin\theta}{(1-r\cos(\theta))^2 + r^2\sin^2\theta}$$

$\sum r^n \cos n\theta$

$\sum r^n \sin(n\theta)$

مفكوك لورنتز

Laurents series

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{on} \quad r<|z-z_0|<R$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$$

← هو نفسه مفكوك Taylor بنفس القواعد السابقة ولكن يحتوى على أقواس ذات أس سالب.

$$f(z) = \cdots\cdots + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z-z_0)^{1} \cdots$$

← أهم جزء فى المفكوك هو معامل القوس الذى أسه = -1

لأنه أى دالة لكى نوجد تكاملها نقوم بفكها بواسطة لورنتز

ونجيب معامل القوس اللى أسه -1 ونضربه فى $\boxed{2\pi i}$

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i\, a_{-1}$$

Ex use Laurent's series to show that

$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\, a_{-1}$ where $f(z)$ is analytic

on the region $r < |z - z_0| < R$

Sol

use

$$\oint_C (z-z_0)^m\,dz = \begin{cases} 2\pi i & m=-1 \\ 0 & m \neq -1 \end{cases} \longrightarrow (1)$$

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$f(z) = \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

$(z-z_0)^m$ بالضرب *

$$f(z)(z-z_0)^m = \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + a_0(z-z_0)^m + a_1(z-z_0)^{m+1} + a_2(z-z_0)^{m+2} \cdots$$

بالتكامل على المنحنى c واستخدام الصورة (1)

$m=0 \implies \oint f(z)\,dz = a_{-1}(2\pi i)$